

§ 4 二项式定理

第 1 课时 二项式定理

【学习目标】 1.能用计数原理证明二项式定理.2.掌握二项式定理及其展开式的通项公式.3.会用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题.

【导语】

艾萨克·牛顿 Isaac Newton(1643—1727)英国科学家. 他被誉为人类历史上最伟大的科学家之一. 他不仅是一位物理学家、天文学家, 还是一位伟大的数学家. 1664 年冬, 由于瘟疫流行而迫使牛顿从剑桥回到乡下, 研读沃利斯博士的《无穷算术》, 牛顿开始了对二项式定理的研究, 并最终建立二项式定理, 牛顿是如何思考的呢?



一、二项式定理

问题 1 在初中, 我们用多项式乘法法则得到了 $(a+b)^2$ 的展开式: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + 2ab + b^2$. 如何利用分步乘法计数原理解释上述展开过程?

提示 从上述过程可以看到, $(a+b)^2$ 是 2 个 $(a+b)$ 相乘, 根据多项式乘法法则, 每个 $(a+b)$ 在相乘时有两种选择, 选 a 或选 b , 而且每个 $(a+b)$ 中的 a 或 b 都选定后, 才能得到展开式的一项. 于是, 由分步乘法计数原理, 在合并同类项之前, $(a+b)^2$ 的展开式共有 $2 \times 2 = 2^2$ 项, 而且每一项都是 $a^{2-k} \times b^k (k=0,1,2)$ 的形式. 而且 $a^{2-k} b^k$ 相当于从 2 个 $(a+b)$ 中取 k 个 b 的组合数 C_2^k , 即 $a^{2-k} b^k$ 的系数是 C_2^k .

问题 2 你能根据问题 1 的分析, 写出 $(a+b)^3$ 的展开式吗?

提示 $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a b^2 + C_3^3 b^3$.

【知识梳理】二项式定理

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$, 可以简写成 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

(1) 这个公式称为二项式定理.

(2) 展开式: 等号右边的式子称为 $(a+b)^n$ 的二项展开式, 展开式中一共有 $n+1$ 项.

(3) 二项式系数: 各项的系数 $C_n^k (k=0,1,2, \cdots, n)$ 称为二项式系数.

(4) 二项式通项: $(a+b)^n$ 展开式的第 $k+1$ 项称为二项式通项, 记作 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

注意点: (1) 每一项中 a 与 b 的指数和为 n ; (2) 各项中 a 的指数从 n 起依次减小 1, 到 0 为止, 各项中 b 的指数从 0 起依次增加 1, 到 n 为止. (3) a 与 b 的位置不能交换; (4) $C_n^k a^{n-k} b^k$ 表示的是第 $(k$

+1)项.

例 1 求 $\left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 的展开式.

反思感悟 求形式简单的二项展开式时可直接由二项式定理展开, 展开时注意二项展开式的特点: 前一个字母是降幂, 后一个字母是升幂. 形如 $(a-b)^n$ 的展开式中会出现正负间隔的情况. 对较繁杂的式子, 先化简再用二项式定理展开.

跟踪训练 1 求 $\left(2x - \frac{3}{2x^2}\right)^5$ 的展开式.

二、二项式定理的逆用

例 2 (1)化简: $1 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$.

延伸探究 若将式子变为 “ $1 - 2C_n^1 + 4C_n^2 - 8C_n^3 + \cdots + (-2)^n C_n^n$ ”, 求化简结果.

(2)化简: $(2x+1)^5 - 5(2x+1)^4 + 10(2x+1)^3 - 10(2x+1)^2 + 5(2x+1) - 1$.

反思感悟 逆用二项式定理可将多项式化简, 对于这类问题的求解, 要熟悉公式的特点、项数、各项幂指数的规律以及各项的系数.

注意: 逆用二项式定理时如果项的系数是正负相间的, 则是 $(a-b)^n$ 的形式.

跟踪训练 2 化简: $C_n^0(x+1)^n - C_n^1(x+1)^{n-1} + C_n^2(x+1)^{n-2} - \cdots + (-1)^k C_n^k(x+1)^{n-k} + \cdots + (-1)^n C_n^n$.

三、二项展开式的通项的应用

例 3 (1)求二项式 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中第 6 项的二项式系数和第 6 项的系数;

(2)求 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数.

延伸探究 若将题目改为 “ $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中 x^3 的系数是 -84 ”, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

反思感悟 (1)求二项展开式的特定项的常见题型

①求第 k 项, $T_k = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$; ②求含 x^k 的项(或 $x^p y^q$ 的项); ③求常数项; ④求有理项.

(2)求二项展开式的特定项的常用方法: ①对于常数项, 隐含条件是字母的指数为 0(即 0 次项);

②对于有理项, 一般是先写出通项公式, 其所有的字母的指数恰好都是整数的项. 解这类问题必须合并通项公式中同一字母的指数, 根据具体要求, 令其属于整数集, 再根据数的整除性来求解;

③对于二项展开式中的整式项, 其通项公式中同一字母的指数应是非负整数, 求解方式与求有理

项一致.

跟踪训练 3 在 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中, 求: (1)第 3 项的二项式系数及系数; (2)含 x^2 的项.

■ 课堂小结 ■

1. 知识清单: (1)二项式展开式的形成过程. (2)二项式定理的正用与逆用.
(3)二项展开式的通项的应用.
2. 方法归纳: 转化化归.
3. 常见误区: 二项式系数与系数的区别, $C_n^k a^{n-k} b^k$ 是展开式的第 $k+1$ 项.



随堂演练

1. 二项式 $(a+b)^{2n}$ 的展开式的项数是()
A. $2n$ B. $2n+1$ C. $2n-1$ D. $2(n+1)$
2. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的第 4 项是()
A. $56x^3$ B. $84x^3$ C. $56x^4$ D. $84x^4$
3. 二项式 $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中, 常数项是_____.
4. 代数式 $(x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1) + 1$ 可化简为_____.

课时对点练



基础巩固

1. $(x+2)^n$ 的展开式共有 12 项, 则 n 等于()
A. 9 B. 10 C. 11 D. 8
2. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为()
A. 60 B. -60 C. 250 D. -250
3. $(x - \sqrt{2}y)^{10}$ 的展开式中 x^6y^4 的系数是()
A. 840 B. -840 C. 210 D. -210
4. 若实数 $a = 2 - \sqrt{2}$, 则 $a^{10} - 2C_{10}^1 a^9 + 2^2 C_{10}^2 a^8 - \cdots + 2^{10}$ 等于()

A. 32 B. -32 C. 1 024 D. 512

5. 在 $(1-x)^5 - (1-x)^6$ 的展开式中, 含 x^3 的项的系数是()

A. -5 B. 5 C. -10 D. 10

6. (多选)对于二项式 $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 下列判断正确的有()

A. 存在 $n \in \mathbf{N}_+$, 展开式中有常数项 B. 对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 展开式中没有常数项

C. 对任意 $n \in \mathbf{N}_+$, 展开式中没有 x 的一次项 D. 存在 $n \in \mathbf{N}_+$, 展开式中有 x 的一次项

7. 若二项式 $(1+2x)^n$ 展开式中 x^3 的系数等于 x^2 的系数的4倍, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 若 $(x+a)^{10}$ 的展开式中, x^7 的系数为15, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$. (用数字填写答案)

9. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式中第3项的系数比第2项的系数大162.

(1)求 n 的值; (2)求展开式中含 x^3 的项, 并指出该项的二项式系数.

10. 已知 $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^n$ (其中 $n < 15$)的展开式中第9项与第11项的二项式系数和是第10项的二项式系数的2倍.

(1)求 n 的值; (2)写出它展开式中的所有有理项.

综合运用

11. 对任意实数 x , 有 $x^3 = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3$, 则 a_2 的值为()

A. 3 B. 6 C. 9 D. 21

12. 在 $\left(3x^2 - \frac{1}{2x^3}\right)^n$ 的展开式中含有常数项, 则正整数 n 的最小值为()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

13. 若二项式 $\left(2x + \frac{a}{x}\right)^7$ 的展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是84, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知在 $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 第9项为常数项, 则:

(1) n 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$; (2)含 x 的整数次幂的项有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个.

拓广探究

15. $(a+b+c)^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)的展开式中的项数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.